

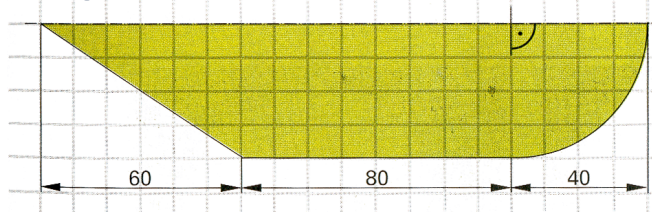
Aufgaben zur Kugel

- 1 Die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche einer Kugel sind gleich.
Berechnen Sie den Radius der Kugel. ☒
- 2 Vergrößert man den Radius einer Kugel um 3 cm, so hat die neue Kugel eine um 288 cm^2 größere Oberfläche.
Berechnen Sie die Radien und die Volumina der beiden Kugeln. ☒
- 3 Einem Würfel mit der Kantenlänge 6,5 cm ist eine Kugel umbeschrieben.
Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Kugeloberfläche größer ist als die Oberfläche des Würfels. ☒
- 4 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent sich das Volumen (die Oberfläche) einer Kugel vergrößert, wenn man den Radius verdoppelt. ☒
- 5.0 In einem Würfel mit der Kantenlänge a liegen acht gleich große Kugeln mit dem Durchmesser 0,5a. ☒
- 5.1 Ermitteln Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens noch übrig bleiben.
- 5.2 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Summe der Oberflächen der Kugeln größer ist als die Würfeloberfläche.
- 6.0 Ein Basketball hat einen Durchmesser von 24,2 cm, ein Tennisball von 6,4 cm.
- 6.1 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Basketball ein größeres Volumen hat als der Tennisball. ☐
- 6.2 Der Umfang eines Fußballs darf zwischen 68 cm und 71 cm groß sein.
Ermitteln Sie, zwischen welchen Grenzen sich dann Volumen und Oberfläche bewegen. ☐

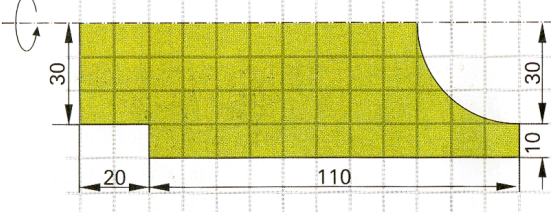


7.0 Die in folgendem Bild dargestellten Figuren rotieren um die angegebene Achse.
Berechnen Sie mit den eingetragenen Maßen (in mm) Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.

7.1 ○



7.2 ⊗



Lösungen

$$1 \quad V_{\text{Kugel}} = O_{\text{Kugel}} \Rightarrow \frac{4}{3}r^3\pi = 4r^2\pi \Rightarrow \frac{4}{3}r = 4 \Rightarrow r = 3$$

2

$$\begin{aligned} O_{\text{alte Kugel}} &= 4r^2\pi & O_{\text{neue Kugel}} &= 4(r+3)^2\pi \\ \Rightarrow 4r^2\pi + 288 &= 4(r+3)^2\pi & \Rightarrow 4r^2\pi + 288 &= 4(r^2 + 6r + 9)\pi \\ \Rightarrow 4r^2\pi + 288 &= 4r^2\pi + 24r\pi + 36\pi & \Rightarrow 24r\pi &= 288 - 36\pi \\ \Rightarrow r &= \frac{288 - 36\pi}{24\pi} = 2,32 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{Radius neue Kugel} = 2,32 + 3 = 5,32$$

$$V_{\text{alte Kugel}} = \frac{4}{3}(2,32)^3 \cdot \pi = 52,31 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{neue Kugel}} = \frac{4}{3}(5,32)^3 \cdot \pi = 630,7 \text{ cm}^3$$

3

$$O_{\text{Kugel}} = 4r^2\pi$$

$$\text{Berechnung des Radius der Kugel: } r_k = \frac{1}{2} \cdot \text{Raumdiagonale Würfels}$$

Berechnung der Raumdiagonale des Würfels:

$$d_{\text{Raum}}^2 = d_{\text{Grundfläche}}^2 + 6,5^2 = (6,5 \cdot \sqrt{2})^2 + 6,5^2 = 3 \cdot 6,5^2 \Rightarrow d_{\text{Raum}} = 6,5 \cdot \sqrt{3}$$

$$O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi = 398,20 \text{ cm}^2 \quad O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot 6,5^2 = 253,50 \text{ cm}^2$$

$$253,50 \text{ cm}^2 \quad 100\%$$

$$398,20 \text{ cm}^2 \quad x\% \Rightarrow x = \frac{398,20 \cdot 100\%}{253,50} = 157,08\%$$

Die Oberfläche der Kugel ist um 57,08% größer als die Oberfläche des Würfels

4

$$V_{\text{alte Kugel}} = \frac{4}{3}r^3\pi \quad V_{\text{neue Kugel}} = \frac{4}{3}(2r)^3\pi = 8 \cdot \frac{4}{3}r^3\pi$$

Das Volumen der neuen Kugel ist achtmal so groß, also vergrößert es sich um 700%

$$O_{\text{alte Kugel}} = 4r^2\pi \quad O_{\text{neue Kugel}} = 4(2r)^2\pi = 4 \cdot 4r^2\pi$$

Die Oberfläche der neuen Kugel ist viermal so groß, also vergrößert sie sich um 300%

5.1

$$V_{\text{Kugeln}} = 8 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = 8 \cdot \frac{4}{3} (0,25a)^3 \pi = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{64} a^3 \pi = \frac{1}{6} a^3 \pi$$

$$V_{\text{Würfel}} = a^3$$

$$a^3 \quad 100\%$$

$$\frac{1}{6} a^3 \pi \quad x\% \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{6} a^3 \pi \cdot 100\%}{a^3} = 52,36\%$$

Es bleiben noch $100\% - 52,36\% = 47,64\%$ übrig

5.2

$$O_{\text{Kugeln}} = 8 \cdot 4r^2 \pi = 8 \cdot 4 \cdot (0,25a)^2 \pi = 32 \cdot \frac{1}{16} a^2 \pi = 2a^2 \pi$$

$$O_{\text{Würfel}} = 6a^2$$

$$6a^2 \quad 100\%$$

$$2a^2 \pi \quad x\% \Rightarrow x = \frac{2a^2 \pi \cdot 100\%}{6a^2} = 104,72$$

Die Summen der Kugeloberflächen ist um 4,72% größer als die Würfeloberfläche

6.1

$$V_{\text{Basketball}} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} (12,1)^3 \pi = 7420,70 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Tennisball}} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} (3,2)^3 \pi = 137,26 \text{ cm}^3$$

$$137,26 \text{ cm}^3 \quad 100\%$$

$$7420,70 \text{ cm}^3 \quad x\% \Rightarrow x = \frac{7420,70 \cdot 100\%}{137,26} = 5406,31\%$$

Das Volumen des Basketballs ist um 5306,31% größer als das des Tennisballs

6.2

$$U_{\text{Fußball1}} = 2r\pi = 68 \Rightarrow r = \frac{68}{2\pi} = 10,82 \text{ cm}$$

$$U_{\text{Fußball2}} = 2r\pi = 71 \Rightarrow r = \frac{71}{2\pi} = 11,3 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Fußball1}} = \frac{4}{3} \cdot (10,82)^3 \cdot \pi = 5306,04 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Fußball2}} = \frac{4}{3} \cdot (11,3)^3 \cdot \pi = 6043,99 \text{ cm}^3$$

$$O_{\text{Fußball1}} = 4 \cdot (10,82)^2 \cdot \pi = 1471,18 \text{ cm}^2$$

$$O_{\text{Fußball2}} = 4 \cdot (11,3)^2 \cdot \pi = 1604,60 \text{ cm}^2$$

7.1

$$V = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^2 \cdot 60 = 100530,96 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{Zylinder}} = 40^2 \cdot \pi \cdot 80 = 402123,86 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 40^3 \cdot \pi = 134041,29 \text{ mm}^3$$

$$V = 100530,96 + 402123,86 + 134041,29 = 636696,11 \text{ mm}^3$$

$$O = \text{Mantelfläche Kegel} + \text{Mantelfläche Zylinder} + O_{\text{Halbkugel}}$$

$$\text{Mantelfläche Kegel} = r \cdot \pi \cdot m$$

$$m^2 = 40^2 + 60^2 = 5200 \Rightarrow m = 72,11 \text{ mm}$$

$$A_M = 40 \cdot \pi \cdot 72,11 = 9061,61 \text{ mm}^2$$

$$\text{Mantelfläche Zylinder} = 2r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 40 \cdot \pi \cdot 80 = 20106,19 \text{ mm}^2$$

$$O_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (40)^2 \cdot \pi = 10053,10 \text{ mm}^2$$

$$O = 9061,61 + 20106,19 + 10053,10 = 39220,9 \text{ mm}^2$$

7.2

$$V = V_{\text{Zylinder1}} + V_{\text{Zylinder2}} - V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Zylinder1}} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 30^2 \cdot \pi \cdot 20 = 56548,67 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{Zylinder2}} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 40^2 \cdot \pi \cdot 110 = 552920,31 \text{ mm}^3$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot \pi = 56548,67 \text{ mm}^3$$

$$V = 56548,67 + 552920,31 - 56548,67 = 552920,31 \text{ mm}^3$$

$$O = \text{Grundfläche Zylinder1} + \text{Mantelfläche Zylinder1} + \text{Mantelfläche Zylinder2} + 2 \cdot A_{\text{Kreisring}} + O_{\text{Halbkugel}}$$

$$\text{Grundfläche Zylinder1} = r^2 \pi = 30^2 \cdot \pi = 2827,43 \text{ mm}^2$$

$$M_{\text{Zylinder1}} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot 20 = 3769,91 \text{ mm}^2$$

$$M_{\text{Zylinder2}} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 40 \cdot \pi \cdot 110 = 27646,02 \text{ mm}^2$$

$$A_{\text{Kreisring}} = 40^2 \cdot \pi - 30^2 \cdot \pi = 2199,11 \text{ mm}^2$$

$$O_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (30)^2 \cdot \pi = 5654,87 \text{ mm}^2$$

$$O = 2827,43 + 3769,91 + 27646,02 + 2 \cdot 2199,11 + 5654,87 = 44296,45 \text{ mm}^2$$